

В. К. Маригодов

## ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОЕ СРАВНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ И ПРЕДСКАЖЕНИЕ СИГНАЛОВ

Теория игр является математической теорией конфликтных ситуаций, в которых сталкиваются интересы двух или более сторон ("партнеров", "игроков"), преследующих различные цели. Предметом теории игр является математический анализ формализованной модели конфликта, учитывающий особенности реальной ситуации взаимодействия антагонистически настроенных сторон. Конечная цель игры - выработка рекомендаций по рациональному поведению каждого из противников в ходе конфликта.

Теоретико-игровой подход может успешно сочетаться с задачами моделирования сложных радиотехнических систем на ЗЕМ, а также с проблемами оптимального проектирования РЭС в условиях современного производства. Особую актуальность приобретает в настоящее время проблема оценки эффективности систем оптимальной линейной фильтрации и оптимального линейного предсказания и корректирования сигналов, передаваемых по спутниковым системам связи (ССС). Эффективность и помехоустойчивость современных ССС во многом зависят от методов оптимальной обработки сигналов, а также от потенциальной возможности модемов и кодеков.

Теоретико-игровые методы оценки эффективности оптимальной линейной фильтрации (ОЛФ) рассмотрены в исследованиях [1, 8]. Оценка эффективности метода оптимального линейного предсказания и корректирования (ОЛПК) сигналов проведена в [2-4]. К сожалению, в упомянутых работах применялись разные критерии оценки, в качестве функции выигрыша и стратегий сторон выбирались различные параметры. Поэтому на основе проведенных ранее исследований не представляется возможным сравнить эффективность методов.

---

335053, Севастополь, студенческий городок,  
Приборостроительный институт

Рассмотрим конфликтную ситуацию взаимодействия операторов системы передачи информации (СПИ) и системы радиопомех (СРП) или "природа". В качестве критерия оценки методов ОЛФ и ОЛПК выберем среднеквадратичный (по минимуму среднего квадрата ошибки). Таким образом, среднеквадратичная ошибка является функцией выигрыша. Оператор СПИ стремится минимизировать среднеквадратичную ошибку, выбирая свои стратегии АЧХ фильтров (оптимального линейного либо оптимальных предскахающего и корректирующего). Оператор СРП (или "природа") стремится максимизировать упомянутую ошибку, его стратегии - выбор того или иного спектра аддитивной помехи. В данной постановке игровой ситуации в отличие от работы [8] задача операторов СПИ более реально обоснована. Действительно, нет никакого смысла относить стратегии выбора спектра сигнала и выбора АЧХ оптимального линейного фильтра к антагонистическим, поскольку эти стратегии должны принадлежать лишь одной стороне - оператору СПИ. Он же должен являться и конструктором фильтров. Что касается выбора спектра полезного сигнала, то его вид и форма определяется принятой системой модуляции и кодирования в передающем тракте.

Среднеквадратичная ошибка для методов соответственно ОЛПК и ОЛФ находится из известных выражений [6, 8]

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega) N(\omega)}{|K_1(\omega)|^2 G(\omega) + N(\omega)} d\omega, \quad (1)$$

$$\bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [G(\omega) |1 - K_2(\omega)|^2 + N(\omega) |K_2(\omega)|^2] d\omega, \quad (2)$$

где  $G(\omega)$ ,  $N(\omega)$  - спектральные плотности мощности соответственно сигнала и аддитивной помехи, действующей в канале;  $K_1(\omega)$  - АЧХ оптимального предскахающего фильтра (предполагается, что АЧХ предскахающего и корректирующего фильтров не взаимнообратны);  $K_2(\omega)$  - АЧХ оптимального линейного фильтра. Можно доказать, что в данной игровой ситуации справедливо неравенство [4]

$$\min_K \max_N \overline{\mathcal{E}}^2(K, N) \gg \max_N \min_K \overline{\mathcal{E}}^2(K, N), \quad (3)$$

где  $K, N$  - упомянутые стратегии сторон. Введен в качестве дополнительных условий фиксации средней мощности сигнала на входе канала (для ОЛПК) и ограничение средней мощности источника аддитивных помех (для обоих методов):

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(w) |K_f(w)|^2 dw = P_{cp} = \text{const}, \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} N(w) dw = P_n = \text{const}. \quad (5)$$

$$\min \overline{\mathcal{E}}^2(K, N)$$

Для отыскания  $K$  варьируем функционал (1) с учетом дополнительного условия (4) по  $|K_f(w)|^2$ . При этом получаем следующее уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$|K_f(w)|^2 G(w) + 2|K_f(w)| G(w)N(w) + N(w) - 1/\lambda G(w)N(w) = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda$  - множитель Лагранжа, определяющийся из уравнения (4). При  $G(w)/N(w) > 1$  получаем квадрат модуля передаточной функции оптимального предсказывающего фильтра

$$|K_f(w)|_{opt}^2 = \frac{P_{cp} K^2 + P_n}{1 + \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{G(w)N(w)} dw} \sqrt{\frac{N(w)}{G(w)}} - \frac{N(w)}{G(w)}, \quad (7)$$

где  $K$  - коэффициент, характеризующий затухание сигнала в канале (предполагается, что передаточная функция идеального канала  $|K(w)| = K^2 = \text{const}$ ,  $K^2 \ll 1$ ).

Представляя значение  $|K_f(w)|_{opt}^2$  в выражение (1), приходим

$$\min_K \overline{\epsilon^2}(K, N) = \frac{1}{P_{ср} K^2 + P_n} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{G(w)N(w)} \, \omega w \right)^2 \quad (8)$$

В этой формуле не учтена составляющая ошибки, которая обусловлена непрозрачностью предсказывающего и корректирующего фильтров для тех участков спектра сигнала, для которых  $[G(w) \times 1/\lambda_1 N(w)] < 1$ .

С учетом условия (5) находим максимум правой части неравенства (3). При этом уравнение Эйлера-Лагранжа приводится к

$$\text{виду} \quad \sqrt{G(w)} - 2\lambda_2 \sqrt{N(w)} = 0, \quad (9)$$

где  $\lambda_2$  - множитель Лагранжа, определяющийся из условия (5).

Из решения этой вариационной задачи находим наилучший спектр аддитивной помехи и искомый максимум:

$$N(w) \min = G(w) P_n / P_c, \quad (10)$$

$$\max_N \min_K \overline{\epsilon^2}(K, N) = P_c P_n / (P_{ср} K^2 + P_n), \quad (11)$$

где  $P_c$  - средняя мощность сигнала на входе предсказывающего фильтра.

Рассмотрим случай взаимобратных фильтров. В более общем виде выражение (1) можно представить как [5]

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ [G(w)K^2 - 2K_1(w)K_2(w)G(w)K^2 + |K_2(w)|^2 [|K_1(w)|^2 G(w)K^2 + N(w)] \} \, \omega w. \quad (12)$$

Для взаимобратных фильтров  $K_1(w)K_2(w) = 1$ , поэтому из (12) получаем

$$\bar{c}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N(w)}{|K_p(w)|^2} dw. \quad (13)$$

Используя дополнительные условия (4) и (5), по приведенной выше методике находим

$$|K(w)|_{opt}^2 = \frac{P_{ср} K^2}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{G(w)N(w)} dw} \sqrt{\frac{N(w)}{G(w)}}, \quad (14)$$

$$\min_K \bar{c}^2(K, N) = \frac{1}{P_{ср} K^2} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{G(w)N(w)} dw \right)^2; \quad (15)$$

$$\max_N \min_K \bar{c}^2(K, N) = P_{ср} P_n / P_{ср} K^2. \quad (16)$$

Установим, имеет ли место седловая точка в данной игре, т. е. покажем справедливость равенства в выражении (3). Варьируя функционал (13) по  $|K_p(w)|^2$  при дополнительном условии (4), получаем с учетом оптимальной стратегии СРП (10)

$$\min_K \max_N \bar{c}^2(K, N) = P_c P_n / P_{ср} K^2. \quad (17)$$

Аналогичный результат получается и для случая взаимно-обратных фильтров. Таким образом, неравенство (3) превращается в равенство, оптимальные (минимаксные и максиминные) стратегии операторов СПИ и СРП определяются формулами (7), (14), (10). Цена игры соответствует выражениям (11) и (16).

Определим оптимальные стратегии и цену игры для метода ИФ при тех же условиях, что и для метода ОЛФ. При реализа-

ции передаточной функции ОМФ, применяемого для компенсации АЧХ неидеального канала, может потребоваться очень большое усиление на значительных частотных интервалах. В связи с этим разработчику ОМФ необходимо внести некоторое ограничение на "площадь усиления" (произведение коэффициента усиления на полюсу частот) [6]

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K_2(w)|^2 \omega w = \overline{e_1^2} = \text{const.} \quad (18)$$

Варьируя функционал (2) по  $|K_2(w)|^2$  с учетом условия (18), получаем

$$|K_2(w)|_{opt}^2 = \frac{G(w)}{[G(w) + N(w) + \mu_1]^2} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \min_K \overline{e^2}(K, N) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w)N(w)}{G(w) + N(w) + \mu_1} \omega w + \\ &+ \frac{\mu_1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w) [N(w) + \mu_1]}{[G(w) + N(w) + \mu_1]^2} \omega w, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $\mu_1$  - множитель Лагранжа, который находится из дополнительного условия (18). Если отношение сигнал-помеха в канале достаточно велико, то  $\mu_1 \rightarrow 0$ . Последнее соответствует требованиям компенсации АЧХ неидеального канала [6].

При  $\mu_1 = 0$  получаем известное выражение для наименьшей среднеквадратичной ошибки при ОМФ

$$\min_K \overline{e^2}(K, N) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(w)N(w)}{G(w) + N(w)} \omega w. \quad (21)$$

Варьируя функционал (20) по  $N(w)$  с учетом дополнительного условия (5), находим спектр наилучшей помехи

$$N(w)_{\min} = G(w) (1/\sqrt{\mu_2} - 1), \quad (22)$$

где  $\mu_2$  — множитель Лагранжа, определяемый из ограничения (5). Подставляя найденное значение  $\mu_2$  в (22), получаем

$$N(w)_{\min} = G(w) P_n / P_c. \quad (23)$$

Таким образом, наилучший спектр помехи для методов ОМФ и ОМПК получается одинаковым и прямо пропорциональным спектру полезного сигнала с коэффициентом пропорциональности, равным  $1/\sqrt{P_c}$ .

Используя (20), (23) находим максимум правой части неравенства (3)

$$\max_N \min_K \epsilon^2(K, N) = P_c P_n / (P_c + P_n) \quad (24)$$

Меняя последовательность операций максимизации и минимизации функционала (2) при тех же ограничениях для соответствующих стратегий оператора СПИ и СРП по аналогии со случаем ОМПК, получаем

$$\min_K \max_N \epsilon^2(K, N) = P_c P_n / (P_c + P_n). \quad (25)$$

Поскольку правые части равенства (24), (25) совпадают, то доказано существование седловой точки в игре и при исследовании метода ОМФ. В этом случае неравенство (3) превращается в равенство. При этом оптимальные стратегии СПИ и СРП соответственно определяются формулами (19), (23), а цена игры — выражениями (24) или (25).

Проанализируем полученные результаты. Сравнивая максимумы выражений (11) и (24), приходим к выводу, что цена игры в обоих случаях совпадает, если средняя мощность сигнала на входе оптимального линейного и корректирующего фильтров одинакова, т. е.  $P_c = P_{c\text{РК}}$ . Представляется важным отметить, что средняя мощность предсказанного сигнала имеет существ-

венное отличие от мощности того же сигнала при отсутствии предискажения. В результате предискажения оператору СПИ предоставляется возможность обеспечить максимизацию энтропийной мощности предискаженного сигнала, например, получением равномерного спектра сигнала на выходе предискажающего фильтра. Последнее важно также и тем, что предискажающий фильтр включается в передающий тракт, где помехи отсутствуют, и в чистом виде можно реализовать оптимальную форму спектра передаваемого сигнала. При ОМФ задача оптимизации формы спектросигнала принципиально не может быть решена, поскольку, наряду с полезным сигналом на входе ОМФ действует аддитивная помеха. Поэтому изменение формы спектра входного сигнала будет сопровождаться соответствующим изменением формы спектра аддитивной помехи, в результате чего сигнал и помеха на выходе ОМФ потеряют относительно одинаковые количества энергии (если спектры этих процессов коррелированы между собой по форме). Если сигнал и помеха до предискажения или фильтрации коррелированы по форме, например, обладают равномерными спектрами, то необходимость предискажения отпадает, поскольку такие энергетические спектры удовлетворяют условиям реализации пропускной способности канала. Наличие ОМФ в этом случае также не решает задачи минимизации среднеквадратичной ошибки, поскольку при одинаковой энергии процессов на входе ОМФ последний окажет равноценное действие на сигнал и помеху. При данных оценках предполагалось, что канал линеен и обладает идеальными АЧХ и ФЧХ. Если это условие не выполняется, то оба метода могут применяться для компенсации неидеальности канала. В этом случае также очевидно преимущество метода ОМПК, особенно при больших отношениях сигнал-помеха в канале [6]. При этом предискажающий фильтр может идеализировать канал, а корректирующий фильтр - выполнять роль оптимального линейного фильтра.

Таким образом, в отличие от метода ОМФ метод ОМПК позволяет имеющуюся мощность полезного сигнала распределить по полосе частот канала так, чтобы сумма спектральных плотностей мощности сигнала и помехи была постоянной в пределах эффективной полосы частот канала. На этом свойстве основано информационное отличие методов ОМПК и ОМФ.

Представляет интерес оценить сравнительную эффективность методов ОМФ и ОМПК при различных величинах отношения



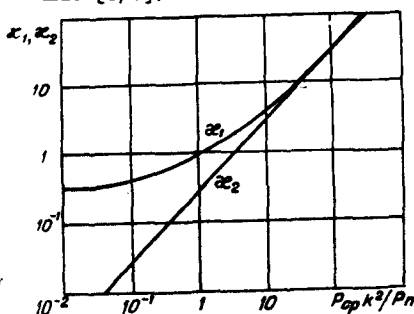
сигнал-помеха  $P_{ср} k^2 / P_n$  в канале. Для этого введем параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно для не взаимобратных АЧХ при ОЛФ и взаимобратных АЧХ фильтров. Коэффициенты  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  характеризуют отношение максимальных (или минимаксных) среднеквадратичных ошибок (цена игры) методов:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{\max_N \min_K \epsilon^2 (K, N)_{олф}}}{\sqrt{1 + P_{ср} k^2 / P_n}} = \frac{\sqrt{\max_N \min_K \epsilon^2 (K, N)_{олпк}}}{\sqrt{1 + P_c / P_n}} \quad (26)$$

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt{\max_N \min_K \epsilon^2 (K, N)_{олф}}}{\sqrt{P_{ср} k^2}} = \frac{\sqrt{\max_N \min_K \epsilon^2 (K, N)_{олпк}}}{\sqrt{P_n (1 + P_c / P_n)}} \quad (27)$$

На рисунке изображены графики зависимости относительной эффективности сравниваемых методов от величины отношения сигнал-помеха на выходе канала, рассчитанные по формулам (26) и (27). При этом предполагалось, что средние мощности источников сигнала и помехи приняты одинаковыми ( $P_c = P_n$ ).

Из анализа рисунка следует, что относительная эффективность метода ОЛФ по сравнению с методом ОЛФ возрастает при увеличении отношения сигнал-помеха на выходе канала. Этот вывод совпадает с результатами, полученными другими методами [6, 7].



Рисунок

При малых величинах отношения сигнал-помеха больший выигрыш получается для случая не взаимобратных АЧХ фильтров (ОЛФ). При увеличении помехоустойчивости ( $P_{ср} k^2 / P_n > 10$ ) эффективность метода существенно не зависит от выполнения взаимобратности АЧХ фильтров.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крапивин В. Ф. Теоретико-игровые методы синтеза сложных систем в конфликтных ситуациях. -М.: Сов. радио, 1972. -192 с.
2. Маригодов В. К. Влияние статистических свойств сигнала на эффективность предсказания и корректирования // Изв. вузов. Радиоэлектроника. - 1978. -21, -№11. -С. 29-34.
3. Маригодов В. К. Эффективность предсказания и корректирование в условиях активных помех //Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1975. -18, -№11. -С. 42-45.
4. Маригодов В. К. Оценка эффективности предсказаний методами теории игр // Отбор и передача информ. - Киев: Наук. думка, 1977. - Вып. 50. -С. 13-18.
5. Овсеевич И. А., Пинскер М. С. Оптимальное линейное предсказание и корректирование сигнала при передаче его по многопутевой системе // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. Энергетика и автоматика. -1959. - №2. -С. 49-59.
6. Френкс Л. Е. Теория сигналов. -М.: Сов. радио, 1974. - 344 с.
7. Цыбаков Б. С. Линейное кодирование сообщений // Радиотехника и электроника. -1962. - 7, -№1. -С. 25-38.
8. Yovits M. C., Jackson J. L. Linear filter optimization with game theory considerations. -IRE Nation Conv. Rec., 1955. - P. 193-199.